问在要害，问在关键，问在思想

——“简单线性规划”教学设计与思考

刘　燕　　福建省福州市华侨中学（350000）

随着《普通高中数学课程标准（2017 年版）》的颁布、数学核心素养的正式提出，高中课程改革进入了一个新阶段，这既给一线教师带来了新的挑战，又为一线教师提供了新的探索平台和施展自身才华的空间．本文以“简单线性规划”一课教学设计与思考为例，通过问在要害、问在关键、问在思想，探讨如何在高中数学课程中有效渗透数学核心素养．

1 情境创设，问在要害

“数学课程应当围绕问题解决来组织”“数学教师应对创造一种使问题解决得以蓬勃发展的课堂环境”[1]，问题是思维的起点，根据皮亚杰的认知平衡原理，笔者以生活实例引入本课，设计一系列有现实意义的问题，意在制造认知冲突、激发学生学习兴趣．具体而言，笔者用问题链来引导学生总结出解答线性规划问题的一般规律，由浅入深，让学生小心求证，一步步探索，这样有利于培养学生的探索能力、创造能力、解决问题的能力，意在使学生成为数学知识、数学方法、数学思想的探索者和发现者．

例 1 2003 年入春后，“非典型性肺炎”肆虐，SARS 危及人类生命，举国上下投入到抗击非典这场没有硝烟的“战争”中，特别是医务部门站在“战争”的最前沿．在此期间，某药品公司急需利巴韦林、阿司匹林等药品．现有 A, B 两种粉末药品含有利巴韦林、阿司匹林等成分，其中每克 A 药品有 2 毫克利巴韦林、5 毫克阿司匹林，每克 B 药品含有 1 毫克利巴韦林、7 毫克阿司匹林．现需要提供 12 毫克的利巴韦林、70 毫克的阿司匹林，问需要药品 A 和药品 B 的总质量为多少片？

解题分析：列表格分析．

药品\成份	利巴韦林 (mg)	阿司匹林 (mg)
药品 A(g)	2	5
药品 B(g)	1	7
需要量 (mg)	12	70

解法 1（代数法）设需要 A 药品 X g，B 药品 Y g，药品的总量为 Z g．则药品的总量为 $Z=X+Y$．

由题意得 $\begin{cases}5X+7Y=70,\\2X+Y=12,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}X=\dfrac{14}{9},\\Y=\dfrac{80}{9},\end{cases}$

$\therefore Z=X+Y=\dfrac{14}{9}+\dfrac{80}{9}=\dfrac{94}{9}(\text{g})$．

答：两类药品的总量为 $\dfrac{94}{9}$ g．

解 2（几何法）设需要 A 药品 X g，B 药品 Y g，药品的总量为 Z g．则药品的总量为 $Z=X+Y$．由题意得 $\begin{cases}5X+7Y=70,\\2X+Y=12,\end{cases}$ 因此，根据方程组的几何意义，如下图 1 所示，本方程组的解就是两条直线的交点 $(\dfrac{14}{9},\dfrac{80}{9})$，$\therefore Z=X+Y=\dfrac{14}{9}+\dfrac{80}{9}=\dfrac{94}{9}(\text{g})$．

答：两类药品的总量为 $\dfrac{94}{9}$ g．

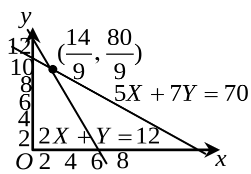

图 1

设计意图 高中阶段的例题、习题，多数只涉及两个变量的线性规划问题，难度不大．对学生而言，系统地按照图形来研究、解决实际问题，这是第一次．例 1 的背景，让枯燥的线性规划问题图解法变得鲜活起来，在具体的教学过程中，教师还可以设计一些契合学生学习特点的情境，如对于当下高中生，可以和他们出生于 2003 年前后对应起来，可以加入一些当年医务工作者的爱国、奉献、牺牲的实例，还可以加入当年科研人员短时间内攻克疾病的顽强奋斗历程．在叙事育人、帮助学生建立社会责任感的同时，笔者以例 1 中的具体问题作为思维生长点，追溯线性规划的本原：从已知的二元一次方程组的解题思路，到二元一次不等式组的解题思路；从代数法到几何法，再到学生感到陌生的解答简单线性规划问题的解题方法．巧妙的情境创设，融数学建模于其中．问在要害，让学生不仅知其然，而

且知其所以然，让不同学习程度的学生都能找到成就感和获得感，从而引起学生的探究兴趣，提升学生的学习参与度．

2 问题拓展，问在关键

课堂教学的重点、难点是教师教学研究的关键，因为它将直接影响教学效果．一方面，针对教学重点，备课时教师要广泛查阅资料、下大气力研究，力争教学时深入浅出、有的放矢；另一方面，针对教学难点，教师应该做好备案，根据学生可能出现的困惑进行有针对性的设计．传统教学中，部分教师突破教学重点、难点的方式较单一，在强调核心素养的大背景下，他们便显得力不从心．

例 2 最新研究结果表明，在药物成分中添加磷甲酸钠，对“非典型性肺炎”治疗效果更佳．每克 A 药品有 2 毫克利巴韦林、5 毫克阿司匹林、1 毫克磷甲酸纳，每克 B 药品含有 1 毫克利巴韦林、7 毫克阿司匹林、6 毫克磷甲酸纳．现需要利巴韦林至少 12 克、阿司匹林至少 70 克、磷甲酸纳至少 28 克，问需要药品 A 和药品 B 的总质量为多少片？

解题分析：列表格分析．

药品\成份	利巴韦林(mg)	阿司匹林(mg)	碳甲酸钠(mg)
药品 A(g)	2	5	1
药品 B(g)	1	7	6
需要量(mg)	至少 12	至少 70	至少 28

同样，设需要 A 药品 X g，B 药品 Y g，药品的总质量为 Z g．由题意得 $\begin{cases} 2X+Y\ge 12, \\ 5X+7Y\ge 70, \\ X+6Y\ge 28, \\ X\ge 0, \\ Y\ge 0, \end{cases}$ 药品的总量为 $Z=X+Y$，那么 Z 是否还可以得到唯一解？只要考查 $Y=-X+Z$ 与 $2X+Y\ge 12$，$5X+7Y\ge 70$，$X+6Y\ge 28$ 三个不等式围成区域的交叉过程中在 Y 方向上的截距最小的值就是本题所求解．具体求解如图 2．

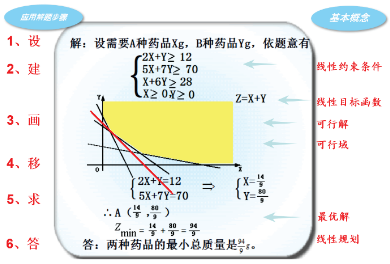

图 2

设计意图 基于核心素养的目标制定应该以课程标准为依据，呈现目标设计的多元性；以数学本质为核心，体现目标设计的有效性；以理解学生为基础，关注目标设计的针对性[2]．设置例 2 是本节课的关键环节之一，很显然，例 2 是例 1 的拓展，两道题有着必然的联系，关键是通过例 2 的分析和解题，使简单线性规划问题的几个基本概念和应用解题步骤都得到充分体现，并深化了学生对图解法的认识，培养学生改造、发展、变更命题的能力，使学生的整个思维过程和试题背景知识融合了起来．

笔者借助动画演示，直观、形象、生动、具体地展现数形结合的过程，学生接受起来轻松自如．师生共同完成解题过程，巩固解线性约束条件、线性目标函数、可行解、可行域和最优解等概念，感悟线性规划的实际意义，掌握线性规划的图解法以及如何用图解法求线性目标函数的最优解的一般解题步骤：设、建、画、移、求、答．使学生对数形之间的转化关系有了直观的了解．

具体“数”“形”转化关系如下表：

代数	几何
线性目标函数	直线方程
线性目标函数的函数值	直线的纵截距
线性约束条件（二元一次不等式（组）的解集）	可行域
线性目标函数的最值	直线的纵截距的最值

若条件允许，教师可以考虑依托智慧教室，运用好课前、课中和课后三个阶段精心设计本课．课前，引入云平台（或类似平台），学生充分预习，思考、解答本课 6 道例题（计算机对答题结果做出准确评价，为教师执教本课做好充分的数据准备）；课中，教师依托智慧教室的教学平台，与学生即时互动，掌握当堂测试中学生的应答情况；课后，教师依托云平台布置电子作业（支持资源题库、支持统计分析的功能），随后顺利开展作业测验、个性化辅导和复习巩固．

例 2 问在了本课的关键处，让学生对简单线性规划问题的解题思路和关键步骤有了清晰的认识．通过解答例 2，学生对数学建模有了初步的印象，对数学知识与现实世界的联系产生了浓厚的兴趣．

3 问题探究，问在思想

数学核心素养的提出，指向学生的综合发展和长远成长，具有深远的意义．教师应深入解读教材、

深刻理解教材，挖掘教材的内在价值与深层内涵，引导学生形成用数学解决问题的基本思想方法，促使学生形成以数学的眼光看世界、以数学的思维思考世界、以数学的语言表达世界的素养．

例 3 不改变线性约束条件，目标函数改为 $Z=aX+Y$，若其唯一最优解是 $A(\frac{14}{9},\frac{80}{9})$，求 a 的取值范围？

解题分析 本题给出“不改变线性约束条件”，很容易画出约束条件的可行域（还是例 2 画出的可行域），需要提醒注意目标函数的几何意义，a 的取值范围就是 $Y=-aX+Z$ 中，满足条件的斜率的范围，讨论 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 和 a 在围成可行域的三条直线的斜率之间的几种情况，再注意到满足唯一最优解是 $A(\frac{14}{9},\frac{80}{9})$，所以求解 a 的范围是 $(\frac{5}{7},2)$．

例 4 在不改变约束条件下，目标函数 $Z=X+Y$ 是否存在最大值？如何改变线性约束条件，使得目标函数 $Z=X+Y$ 存在最大值？

解题分析 通过上述几个例题的学习，我们首先要注意到对于目标函数是否有最大值的问题，转化为直线 $Y=-X+Z$ 与可行域相交过程中在 Y 轴上的截距是否存在最大值的问题．其次，要考虑到可行域如果是有限范围，那么，直线 $Y=-X+Z$ 与可行域相交过程中在 Y 轴上的截距就有最大值，从而为改变约束条件提供了修改思路．

例 5 将原题中的可行域改为可行域内的整点，那么 $A(\frac{14}{9},\frac{80}{9})$ 是否为目标函数的最优解？若不是，如何求最优解？

解题分析 本题涉及整点问题，有不同的解题方法，例如，可以在可行域内打网格，通过平移观察是否有合适的整点满足题目条件．特别需要关注区域的交点和边界的情况．

例 6 在药片总量最小的前提之下，如何搭配价格最低？

药品\成分	利巴韦林	干扰素	膦甲酸钠	每片价格（元）
药片 A（片）	2 mg	5 mg	1 mg	1
药片 B（片）	1 mg	7 mg	6 mg	2
需要量 (mg)	12	70	28	

解题分析 设需要 A 种药片 X 片，B 中药片 Y 片，药片的总量是 Z 片．根据题意，由前面五个例题可以得到：

（1）$Z=X+Y=\frac{94}{9}\approx 10.4$，

（2）$\begin{cases}X+Y=11,\\2X+Y=12,\end{cases}\therefore\begin{cases}X=1,\\Y=10,\end{cases}$

（3）$\begin{cases}X+Y=11,\\5X+7Y=70,\end{cases}\therefore\begin{cases}X=3.5,\\Y=7.5,\end{cases}$

$\therefore 1\le X\le 3.5$，

由于药品只能是整数片，

搭配价格 $L=1X+2Y$，$L_1=1\times1+2\times10=21$，

$L_2=1\times2+2\times9=20$，$L_3=1\times3+2\times8=19$，

所以 $L_{\min}=L_3=19$．

答：共需要药品 11 片，其中 A 种药 3 片，B 种药 8 片，这样搭配价格最低．

设计意图 通过例 2 的顺势答疑、点拨，教师适时转换问题，让问题链成为学生发展创新能力和探索精神为核心的有效载体，达到突出重难点、实现教学目标的目的．由问题背景引出的 6 道例题，始终在可行域、目标函数、最优解三者之间有效运行：例 3 设问在“不改变可行域”，例 4 设问在“不改变目标函数”，例 5 设问在“整点”，例 6 设问在“回归现实背景”，这几个问题层层递进，恰好问在重要的思想方法上，让学生在掌握基础知识的同时，学会科学地思考、系统地分析．对例 5 教学，教师可依学生的理解程度介绍网格法，延伸引出“平移交轨法”等探讨整点问题的方法；还可推荐学生课后收集相关资料（通过图书馆或网络平台），研究类别问题，在有效掌握解决问题方法的同时，形成自主学习的能力，提升自身数学核心素养水平．

本课教学过程中，教师有必要对例 3~6 作延伸探究、归纳小结，以提升学生的思维品质，培养学生数学建模、数学抽象、逻辑推理、数据分析、数学运算等核心素养，并选取一定量的高考试题中关于线性规划的题目让学生练习，促使一些优秀的学生脱颖而出．

学数学、做数学是为了用数学．任何一个数学问题的解决都有个探索过程，这个探索过程实际上是学生认知产生、发展的过程．在以核心素养培育为主旨的高中课程体系下，教师应善于挖掘知识的发生发展过程，并将知识按层次分解成若干个问题，由浅入深，引导学生步步探索、严谨求证．惟其如此，才能真正让高中数学课程“运筹帷幄之中，决胜

千里之外”，真正让学生形成适应未来社会发展所需的探索能力、创造能力和解决问题的能力．

参考文献

[1]綦春霞．数学问题解决在中国的研究历史及其影响[J]．课程·教材·教法，2007（12）：32

[2]叶事一．高中数学课堂教学目标设计的问题与思考[J]．数学教学通讯（教师版），2010（12）：14

基于变易理论的高一函数概念教学设计

林 翠 董 涛

福建师范大学数学与信息学院（350117）

函数的概念是高中函数内容的基础．由于高一函数概念抽象程度较高，内涵和外延丰富，函数概念的理解一直是学生学习的难点．变易理论为函数概念的教学提供了一个新视角，能够帮助学生多维度地理解高中函数的概念．

1 变易理论的主要观点

变易理论是由瑞典教育心理学家马飞龙于20世纪九十年代末期创立的．变易理论认为“理解任何事物的第一步就是审辨”．学习就是使学习者聚焦并审辩学习内容的关键特征，变易是审辨的必要条件．变易理论总结了变易图式的四种学习功能，即对比、分离、类合、融合．对比指的是一个事物、概念或现象在某个维度上不同值或特征的变化，对比关注的是“变易维度”上的某个值；分离指的是学习者将注意集中于事物、概念或现象的某个变易维度上，学习者所识别的是变化的维度；类合指的是如果要将一个特定的值从一个事物中分离出来，就必须保持那个值不变，同时让事物的其他维度发生变化，类合关注的是保持不变的方面；融合指的是让学生注意事物、概念或现象同时变化的几个方面，反映了几个变化的方面之间的关系，以及这些方面与作为整体的学习内容之间的关系．针对关键特征，选取不同的学习功能，设计出具体的变易图式，创设变易空间，能够帮助学生审辩到学习内容的关键特征．

2 高一函数概念教学内容分析

从“四基”和学科素养角度对高一函数概念教学目标分析如下：

课题	基本概念	基本技能	基本经验	核心素养
函数的概念	函数“对应说”、函数三要素	求简单函数的定义域、判断相等函数	从实例中抽象概括出概念	数学抽象

3 学生学前认识调查分析

为了解学生的已有基础，笔者对108名高一学生进行了问卷调查，由调查结果发现，大部分学生不能说出初中函数的具体定义，有一半的学生能从“每个x都有唯一的y与之对应”理解初中函数，对于一次函数、二次函数以及反比例函数印象较深．学生对函数的常见误解主要有：①将变量与未知数等同，对函数的认识仅限于几种具体函数形式；②存在对应关系一定是解析式、一定是有规律的、两个变量间要有因果关系等思维定势；③认为函数只能用解析式表示，无法实现函数不同表示法之间的转化；④对$y=f(x)$理解困难；⑤无法理解函数的一些“非标准形式”，如常数函数、分段函数、离散函数、单值函数．

4 函数概念变易空间设计

通过对教学内容与学生学前认识的分析，笔者将①从变量说过渡到对应说；②函数的表示法；③函数的定义域；④$y=f(x)$的内涵四点作为“函数的概念”这一课题的关键特征．针对这四个关键特征，设计了有助于学生审辩的变易图式，帮助学生学习函数概念．

关键特征1：从变量说过渡到对应说

首先，要让学生知道学习新概念的必要性．给出具体函数让学生进行解释，给出的函数包含学生熟悉的函数与无法用已有知识进行说明的函数．这既能激活学生已有认知，又能激起学生已有知识结构与新问题需求之间的认知冲突，从而顺势引导学生变换角度分析问题，体会学习函数“对应说”的必要性．

变	不变	审辩	功能
能否用“变量说”判断	都是函数	从新视角认识函数	对比